Απειροστικός ΙΙΙ – Φυλλάδιο Ασκήσεων 1

Άσκηση 1. *Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:*

$$\int_0^1\int_0^1 (1-x^3+xy)\,dx\,dy,\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sin y\,dx\,dy,\qquad \int_1^2\int_2^4 (\frac{x}{y}+\frac{y}{x})\,dx\,dy,$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\sec^2 y\,dx\,dy,\qquad \int_{-1}^1\int_0^1 (x^4y+y^2)\,dy\,dx,\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (y\cos x+2)\,dy\,dx,$$
$$\int_0^1\int_0^1 xye^{x+y}\,dy\,dx,\qquad \int_{-1}^0\int_1^2 (-x\log y)\,dy\,dx,\qquad \int_1^3\int_1^2 \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy.$$

Άσκηση 2. *Έστω η συναρτήση* $f(x)=-x^2+2x+3$, $x\in[-1,3]$. *Σχεδιάστε το γράφημα της* $y=f(x)$, *την επιφάνεια εκ περιστροφής* $S=\{(x,f(x)\cos\theta,f(x)\sin\theta):x\in[-1,3],\ \theta\in[0,2\pi]\}\subset\mathbb{R}^3$, *και να υπολογίσετε τον όγκο που περικλείει η τελευταία μεταξύ των επιπέδων* $x=-1$, $x=3$.

Άσκηση 3. *Υπολογίστε τους όγκους των χωρίων που φράσσονται από το γράφημα της* $f:R\to\mathbb{R}$, *το ορθογώνιο* $R=[a,b]\times[c,d]$ *και των επιπέδων* $x=a,b$, $y=c,d$ *για*

$$\text{(i)}\quad f(x,y)=1+2x+3y,\quad R=[1,2]\times[0,1]$$
$$\text{(ii)}\quad f(x,y)=x^4+y^2,\quad R=[-1,1]\times[-3,-2].$$

Άσκηση 4. *Υπολογίστε τον όγκο του κώνου* $z=10-\frac{10}{3}\sqrt{x^2+y^2}$ *με βάση στο* $z=0$ *και κορυφή* $(0,0,10)$, *κάνοντας χρήση της αρχής Cavalieri. Ποια είναι η σχέση του με τον όγκο του αντίστοιχου κυλίνδρου ίδιας βάσης και ύψους;*

Άσκηση 5. *Δείξτε ότι ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες*

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy=-\frac{\pi}{4},\qquad \int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\,dx=\frac{\pi}{4}.$$

Γιατί δεν ισχύει το θεώρημα Fubini; [Υπόδειξη: Θεωρήστε τις παραγώγους των συναρτήσεων

$$(\frac{x}{x^2+y^2})'=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad (\frac{y}{x^2+y^2})'=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

και κατόπιν θεωρήστε τις αλλαγές μεταβλητών $y=\tan t$, $x=\tan t$ *για τον υπολογισμό της κάθε ισότητας αντίστοιχα.]*

Άσκηση 6. *Έστω* $f:R\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *συνεχής και* $f(x,y)\geq 0$ *για κάθε* $(x,y)\in R$. *Δείξτε ότι αν* $\int\int_R f\,dA=0$, *τότε* $f=0$ *στο* R.

Άσκηση 7. *Αντιστρέψτε τη σείρα ολοκλήρωσης, αφού σχεδιάσετε τα χωρία ολοκλήρωσης σε κάθε περίπτωση, και υπολογίστε τα τελικά ολοκληρώματα:*

$$\int_0^1\int_x^1 xy\,dy\,dx,\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta}\cos\theta\,dr\,d\theta,\qquad \int_0^1\int_1^{2-y}(x+y)^2\,dx\,dy,\qquad \int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3}\,dx\,dy.$$

Άσκηση 8. *Χρησιμοποιείστε την ανισότητα μέσης τιμής* $mA(D)\leq\int\int_D f\,dA\leq MA(D)$, *για συνεχείς συναρτήσεις* $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *με σύνολο τιμών* $f(D)=[m,M]$, *για να δείξετε τις ανισότητες*

$$1\leq\int\int_{[-1,1]\times[-1,2]}\frac{dx\,dy}{x^2+y^2+1}\leq 6,\qquad \frac{1}{6}\leq\int\int_D\frac{dA}{y-x+3}\leq\frac{1}{4}$$

όπου το D *στο δεύτερο ολοκλήρωμα είναι το τρίγωνο με κορυφές* $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$.